

Facoltà di Ingegneria

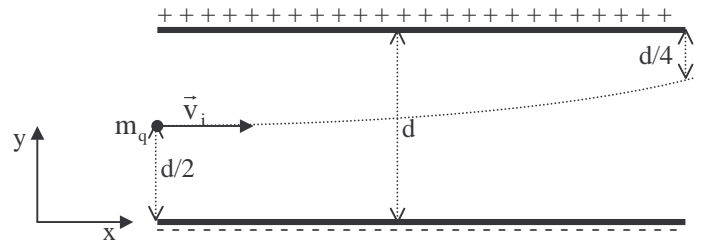
Prova scritta di Fisica II – 28.04.2005 – Compito C

Nota: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

Esercizio n. 1 (grado di difficoltà: 1)

Un elettrone, di carica $-q$ e massa m_q , viene sparato in un condensatore piano, vuoto, avente armature di area A e a distanza d l'una dall'altra (con $d \ll \sqrt{A}$). Il condensatore è carico e la differenza di potenziale tra le armature vale V_C .

L'elettrone entra nel condensatore alla distanza $\frac{d}{2}$ da ciascuna delle due lastre e con velocità \vec{v}_i parallela alle lastre. All'uscita dal condensatore, l'elettrone è a distanza $\frac{d}{4}$ dalla lastra carica positivamente.



Determinare il modulo della velocità \vec{v}_f dell'elettrone all'uscita dal condensatore, trascurando l'effetto della gravità.

Rispondere quindi alle seguenti domande

- con riferimento alla figura, ed assumendo nullo il potenziale della lastra carica negativamente, il potenziale in un punto generico $P \equiv (x, y)$ all'interno del condensatore vale

- $V = \frac{V_C}{d} y$ (*)
- $V = V_C y^2$
- $V = \frac{V_C y}{d^2 x}$
- $V = \frac{V_C}{d} (x + y)$

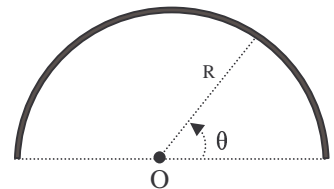
- il modulo della velocità \vec{v}_f con cui l'elettrone esce dal condensatore ha espressione

- $v_f = \sqrt{\frac{qV_C}{4m_q}}$
- $v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{qV_C}{2m_q}}$ (*)
- $v_f = v_i$
- $v_f = \sqrt{v_i^2 - \frac{qV_C}{m_q}}$

Esercizio n. 2 (grado di difficoltà: 1,5)

Un filo, sottile, non conduttore, carico, e' piegato a forma di semicirconferenza di raggio R , come mostrato in figura.

Se la sua carica e' distribuita con densità lineare $\lambda = \lambda_0 \theta$, dove θ è l'angolo mostrato in figura, si studino le proprietà elettrostatiche di questa distribuzione di carica e si risponda alle seguenti domande:



- La carica elettrica totale posseduta dal filo vale:

- $Q = 0$
- $Q = \frac{\lambda_0 \pi^2 R}{2}$ (*)
- $Q = 2\lambda_0 R$
- $Q = \lambda_0 2\pi R$

4. Il potenziale elettrostatico V misurato nel centro O della semicirconferenza vale, rispetto al suo valore, considerato nullo, all'infinito:

- A. $V(O) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$
 B. $V(O) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 R^2}$
 C. $V(O) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}$
 D. $V(O) = \frac{\lambda_0 \pi}{8\epsilon_0} (*)$

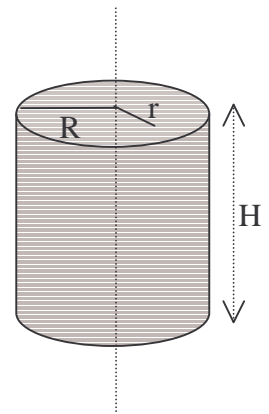
Esercizio n. 3 (grado di difficoltà: 1,5)

Un cilindro retto di materiale isolante, di altezza H e raggio R , contiene carica negativa distribuita simmetricamente rispetto al proprio asse con densità volumica $\rho(r) = -Ar^2$, dove A è una costante < 0 .

Si risponda alle seguenti domande:

5. La carica totale posseduta dal cilindro vale:

- A. $Q = \frac{13\pi HR^2}{5A}$
 B. $Q = -\frac{4\pi AHR^3}{5}$
 C. $Q = \frac{12\pi R^4}{7} H$
 D. $Q = -\frac{2\pi R^4 AH}{4} (*)$



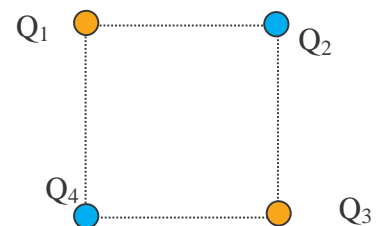
6. Assumendo che $R/H \ll 1$ in maniera che si possa considerare il cilindro come se fosse indefinito, si calcoli, utilizzando la legge di Gauss, il campo elettrostatico $\vec{E}(r)$ esternamente al cilindro, in un generico punto P a distanza r dall'asse dove $r > R$:

- A. $\vec{E}(r) = -\frac{AR^5}{5\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{r}$
 B. $\vec{E}(r) = -\frac{\pi AR^5}{5\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{r}$
 C. $\vec{E}(r) = -\frac{AR^4}{4\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{r} (*)$
 D. $\vec{E}(r) = \frac{3r}{2\pi\epsilon_0} \hat{r}$

Esercizio n. 4 (grado di difficoltà: 1)

Quattro cariche puntiformi rispettivamente di intensità $Q_1 = +q$, $Q_2 = -q$, $Q_3 = +q$, $Q_4 = -q$, sono posizionate ai vertici di un quadrato di lato L , come mostrato in figura.

Studiare le proprietà elettrostatiche di questa configurazione di carica dal punto di vista energetico e rispondere alle seguenti domande:



7. l'energia potenziale elettrostatica associata alla configurazione di cariche mostrata in figura, calcolata rispetto al suo valore nullo all'infinito, vale:

A. $U_{\text{elett}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}(\sqrt{2}-4)^{(*)}$

B. $U_{\text{elett}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$

C. $U_{\text{elett}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$

D. $U_{\text{elett}} = 0$

8. il lavoro che e' necessario compiere dall'esterno per spostare la carica Q_3 dalla sua posizione iniziale, mostrata in figura, all'infinito, vale:

A. $W_{\text{esterno}} = \frac{16q}{\pi\epsilon_0 L}$

B. $W_{\text{esterno}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$

C. $W_{\text{esterno}} = 0$

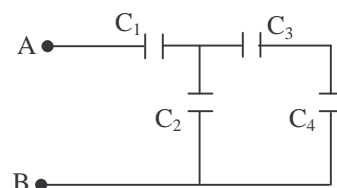
D. $W_{\text{esterno}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L}(4-\sqrt{2})^{(*)}$

Esercizio n. 5 (grado di difficoltà: 1)

Quattro condensatori di capacità $C_1 = 6 \text{ mF}$, $C_2 = 9 \text{ mF}$, $C_3 = 12 \text{ mF}$, $C_4 = 4 \text{ mF}$ sono collegati come mostrato in figura. La differenza di potenziale tra i terminali A e B vale $V = V_A - V_B = 40 \text{ mV}$.

Calcolare:

- la capacità equivalente tra i terminali A e B
- l'energia elettrostatica complessiva immagazzinata nei 4 condensatori
- la carica sul condensatore di capacità $C_1 = 6 \text{ mF}$.



Rispondere quindi alle seguenti domande:

9. la capacità equivalente tra i terminali A e B

A. $4 \text{ mF}^{(*)}$

B. $130 \mu\text{F}$

C. $10 \mu\text{F}$

D. 36 mF

10. l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema dei 4 condensatori vale

A. 40.1 mJ

B. $80.5 \mu\text{J}$

C. $3.2 \mu\text{J}^{(*)}$

D. 60.8 mJ

11. la carica sul condensatore di capacità $C_1 = 6 \text{ mF}$ (che è uguale alla carica sul condensatore equivalente tra i terminali A e B) ha valore

A. $1 \mu\text{C}$

B. 71 mC

C. 4 mC

D. $160 \mu\text{C}^{(*)}$

Esercizio n. 6 (grado di difficoltà: 1)

In un sistema di riferimento cartesiano, di origine O ed assi x, y, z (con versori rispettivamente \hat{i} , \hat{j} e \hat{k}), il potenziale

elettrostatico ha espressione $V(x, y, z) = a x^2 + b y^2$ con a e b costanti dimensionali di valori: $a = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$ e $b = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$.

Determinare:

- l'energia potenziale elettrostatica di una carica $q_1 = +2 \mu\text{C}$, posta nel punto $P \equiv (2,1,1)$
- la forza elettrostatica \vec{F} su una carica $q_2 = -1 \text{ nC}$ posta nel punto $S \equiv (2,1,0)$

Nota: se non altrimenti indicato, è inteso che le distanze sono espresse in metri; ad esempio $P \equiv (1,1,2)$ significa che per P è $x = 1 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$, $z = 2 \text{ m}$. Si ricorda che la relazione tra campo elettrico e potenziale nel punto (x,y,z) è:

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla} V(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

Rispondere quindi alle seguenti domande:

12. l'energia potenziale elettrostatica della carica $q_1 = +2 \mu\text{C}$ nel punto $P \equiv (2,1,1)$ vale

- A. $5 \mu\text{J}$
- B. $10 \mu\text{J}$ (*)
- C. $107 \mu\text{J}$
- D. 35 mJ

13. la forza elettrostatica \vec{F} sulla carica $q_2 = -1 \text{ nC}$ nel punto $S \equiv (2,1,0)$ vale

- A. $\vec{F} = (4\hat{i} + 2\hat{j}) \cdot 10^{-9} \text{ N}$ (*)
- B. $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{k}) \cdot 10^{-9} \text{ N}$
- C. $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot 10^{-9} \text{ N}$
- D. $\vec{F} = (2\hat{i} + \hat{k}) \cdot 10^{-9} \text{ N}$

Si noti, a titolo di esempio, che la scrittura $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot 10^{-9} \text{ N}$ significa

$$F_x = 1 \cdot 10^{-9} \text{ N}, F_y = 2 \cdot 10^{-9} \text{ N}, F_z = 1 \cdot 10^{-9} \text{ N}.$$

Altre domande:

14. "Campo elettrostatico conservativo" significa che:

- A. il campo è variabile nel tempo
- B. il campo non dipende dalla posizione spaziale
- C. il lavoro compiuto dal campo su una carica puntiforme è indipendente dal percorso seguito dalla carica (*)
- D. il lavoro compiuto dal campo su una carica puntiforme è nullo per ogni cammino scelto

15. la capacità di un condensatore dipende

- A. dal materiale di cui sono fatte le armature
- B. dal dielettrico compreso tra le armature (*)
- C. dalla differenza di potenziale applicata alle armature
- D. dalla carica elettrica sulle armature.

16. la forza che si esercita tra due cariche puntiformi uguali, Q_1 e $-Q_2$ poste nel vuoto a distanza R risulta:

- A. dipendere dal reciproco del quadrato della distanza (*)
- B. dipendere dalla distanza elevata al cubo
- C. non dipendere dalla distanza
- D. dipendere dalla velocità relativa tra le cariche

17. in un materiale conduttore carico all'equilibrio elettrostatico si verifica che:

- A. la carica in eccesso si distribuisce esclusivamente sulla superficie del conduttore (*)
- B. la carica in eccesso si distribuisce uniformemente in tutto il volume del conduttore
- C. la carica in eccesso rimane localizzata al centro del conduttore
- D. la carica in eccesso viene bilanciata dalla carica già presente nel conduttore

Soluzioni

Esercizio n. 1

Il campo all'interno del condensatore è uniforme ed ha valore

$$\vec{E} = -\frac{V_c}{d} \hat{j}$$

(\hat{i} e \hat{j} sono i versori dell'asse x e y).

Il potenziale di un punto generico $P \equiv (x, y)$ all'interno del condensatore, assumendo nullo il potenziale V_- della lastra negativa del condensatore ($V_- = 0$), risulta:

$$V(P) - V_- = V(P) = -\int_S^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_S^P \left(-\frac{V_c}{d} \hat{j}\right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \frac{V_c}{d} \int_S^P dy = \frac{V_c}{d} \int_0^y dy = \frac{V_c}{d} y$$

dove si è indicato con S un punto qualsiasi della lastra carica negativamente.

L'energia potenziale elettrostatica dell'elettrone quando l'elettrone entra nel condensatore vale quindi:

$$U_{\text{ent}} = -q \cdot V\left(\frac{d}{2}\right) = -q \frac{V_c}{d} \frac{d}{2} = -q \frac{V_c}{2}$$

analogamente, l'energia potenziale elettrostatica dell'elettrone quando l'elettrone esce dal condensatore vale:

$$U_{\text{usc}} = -q \cdot V\left(d - \frac{d}{4}\right) = -q \cdot V\left(\frac{3d}{4}\right) = -q \frac{3V_c}{4}$$

Poiché il campo elettrico è conservativo possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia (cinetica + potenziale) al moto dell'elettrone, tra la posizione in cui esso entra nel condensatore e quella in cui esce dal condensatore:

$$K_{\text{ent}} + U_{\text{ent}} = K_{\text{usc}} + U_{\text{usc}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_q v_i^2 - q \frac{V_c}{2} = \frac{1}{2} m_q v_f^2 - q \frac{3V_c}{4} \Rightarrow v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{qV_c}{2m_q}}$$

Esercizio n.2

La carica elettrica totale posseduta dal filo non conduttore è data dalla seguente espressione:

$$Q = \int dq = \int_{\text{Filo}} \lambda dl = \int_0^\pi (\lambda_0 \theta R d\theta) = \frac{1}{2} \lambda_0 R \pi^2$$

Il valore del potenziale elettrostatico $V(O)$ nel punto O, rispetto al suo valore nullo all'infinito, potrebbe in linea di principio essere calcolato applicando la definizione di potenziale elettrostatico, ovvero:

$$V(O) - V(\infty) = \int_O^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

in quanto la conservatività del campo elettrostatico ci consente di scegliere il cammino più semplice tra i punti A e B, ma rimane la difficoltà di non conoscere l'espressione esplicita del campo elettrostatico lungo tutti i punti del cammino anche quello più semplice. Pertanto questa strada non è percorribile per la risoluzione del quesito.

Ma, ricordando che il potenziale elettrostatico, rispetto all'infinito, di una carica puntiforme dq, vale:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

possiamo ricorrere al Principio di Sovrapposizione degli effetti per scrivere che:

$$V(O) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

che nel nostro caso diventa banalmente:

$$V(O) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Filo}} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\text{Filo}} \lambda dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} Q = \frac{\lambda_0 \pi}{8\epsilon_0}$$

Esercizio n.3

La carica elettrica contenuta all'interno del volume cilindrico è data da

$$Q = \int dq = \int_{\text{Vcilindro}} \rho dv = \int_0^R -Ar^2 (2\pi r H dr) = -\frac{2\pi AHR^4}{4}$$

Nell'ipotesi che H sia tale che $H \gg R$ possiamo considerare il cilindro infinitamente lungo ed applicare la legge di Gauss

$$\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_A} \rho dv$$

dove, data la simmetria cilindrica esibita dalla distribuzione di carica, A è una superficie gaussiana cilindrica coassiale col cilindro e avente raggio di base pari a r.

Esternamente al cilindro di carica, cioè per $r > R$ abbiamo che

$$E 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi A H R^4}{4}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\vec{E}(r) = -\frac{AR^4}{4\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{r}$$

Esercizio n.4

L'energia potenziale elettrostatica posseduta dalla struttura di cariche descritta è semplicemente il lavoro che è necessario compiere dall'esterno in maniera da portare ciascuna carica elettrica dall'infinito alla posizione richiesta. Calcolando esplicitamente questo lavoro per ciascuna delle cariche, tenendo conto che $\vec{F}_{\text{esterna}} = -\vec{F}_{\text{Elettrostatica}}$ sommando tutti i contributi ottenuti si perviene facilmente alla seguente espressione:

$$U_{\text{elettrostatica}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

che nel nostro particolare caso diventa:

$$U_{\text{elettrostatica}} = 4 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{2}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{2}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} (\sqrt{2} - 4)$$

con ovvio significato delle quantità utilizzate.

Il lavoro, fatto dall'esterno, necessario per portare la carica q_3 dalla posizione occupata in figura all'infinito vale:

$$W_{\text{esterno}} = -W_{\text{Elettrostatico}} = U_{\text{finale}} - U_{\text{iniziale}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (4 - \sqrt{2})$$

dove

$$U_{\text{finale}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (\sqrt{2} - 4)$$

è l'energia potenziale della configurazione delle tre cariche rimanenti dopo l'allontanamento di q_3 all'infinito e

$$U_{\text{iniziale}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} (\sqrt{2} - 4)$$

Esercizio n.5

I condensatori di capacità C_3 e C_4 sono in serie, quindi sono equivalenti ad un condensatore di capacità $C_s = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 3 \text{ mF}$

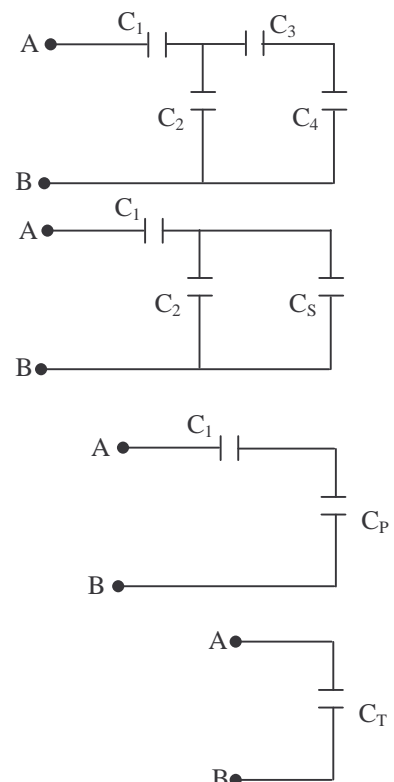
Il condensatori di capacità C_2 e C_s sono in parallelo, quindi hanno capacità equivalente

$$C_p = C_2 + C_s = 12 \text{ mF}.$$

Infine il condensatore C_1 è in serie con il condensatore di capacità C_p , quindi la capacità totale tra i morsetti A e B risulta:

$$C_T = \frac{C_p C_1}{C_p + C_1} = 4 \text{ mF}.$$

La energia elettrostatica complessiva del sistema dei 4 condensatori vale



$$U = \frac{1}{2} C_T V^2 = \frac{1}{2} (4 \cdot 10^{-3} \text{ F}) (40 \cdot 10^{-3} \text{ V})^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1600 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} \text{ F V}^2 = 3200 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 3.2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 3.2 \mu\text{J}$$

I condensatori di capacità C_1 e C_p sono in serie e quindi hanno cariche Q_1 e Q_p uguali tra loro ed uguali alla carica sul condensatore equivalente di capacità C_T : $Q_1 = Q_p = Q_T$.

La carica Q_T sul condensatore equivalente, di capacità $C_T = 4 \text{ mF}$, può essere facilmente calcolata:

$$Q_T = C_T V = 4 \text{ mF} \cdot 40 \text{ mV} = 160 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 160 \mu\text{C}.$$

Esercizio n.6

L'energia potenziale della carica $q_1 = +2 \text{ mC}$ nel punto $P \equiv (2,1,1) \text{ m}$ vale

$$U = q_1 V(P) = q_1 V(2,1,1) = 2 \mu\text{C} \cdot \left(1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot (1 \text{ m})^2 + 1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot (2 \text{ m})^2 \right) = 2 \mu\text{C} \cdot 5 \text{ V} = 10 \mu\text{J}$$

Il campo elettrico in un punto di coordinate (x, y, z) vale:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = -2ax \hat{i} - 2by \hat{j}$$

In particolare, nel punto $S \equiv (2,1,0)$, il campo elettrico vale

$$\vec{E}(S) = \vec{E}(2,1,0) = -2 \cdot 1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot 2 \text{ m} \hat{i} - 2 \cdot 1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot 1 \text{ m} \hat{j} = (-4 \hat{i} - 2 \hat{j}) \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Si noti che il campo elettrico è espresso nell'unità $\frac{\text{V}}{\text{m}} \left(= \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$

La forza elettrostatica sulla carica $q_2 = -1 \text{ nC}$, nel punto $S \equiv (2,1,0)$, vale:

$$\vec{F} = q_2 \vec{E}(S) = q_2 \vec{E}(2,1,0) = q_2 (-2ax \hat{i} - 2by \hat{j}) = -1 \text{ nC} \cdot \left((-4 \hat{i} - 2 \hat{j}) \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) =$$

$$= (4 \hat{i} + 2 \hat{j}) \text{ nC} \frac{\text{V}}{\text{m}} = (4 \hat{i} + 2 \hat{j}) \text{ nC} \frac{\text{N}}{\text{C}} = (4 \hat{i} + 2 \hat{j}) \text{ nN} = (4 \hat{i} + 2 \hat{j}) \cdot 10^{-9} \text{ N}$$